Solución del Segundo Examen Parcial

CI2511: Lógica Simbólica, Septiembre-Diciembre 2012

Carolina Chang
Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información
cchang@usb.ve

**** **Observación:** esta versión es un borrador que puede contener errores. Debe ser utilizada con precaución. ****

04 de Noviembre de 2012, Versión 1.0 [1]

El objetivo de estas notas es brindar una solución del examen Septiembre-Diciembre 2012, que pueda servir de referencia a mis estudiantes de *CI2511: Lógica Simbólica*. La solución se basa en el enfoque de Cálculo Proposicional presentado en *Gries y Schneider(1993): "A Logical Approach to Discrete Math", Springer*.

Cabe destacar que esta guía sólo ilustra algunas formas de responder el examen. Existen, por supuesto, otras posibles demostraciones correctas. Recomiendo intentar los métodos de prueba alternos revisados exhaustivamente en mi guía "Métodos de Prueba en el Cálculo Proposicional".

En todo el examen Septiembre-Diciembre 2012 se podía usar simetrías, asociatividades y doble negación de manera implícita (es decir, se podía usar estos axiomas y teoremas combinados con otros teoremas y sin necesidad de especificar las sustituciones textuales utilizadas). Sin embargo, se requería indicar la paridad de las expresiones a debilitar o fortalecer.

Metateorema General de Monotonía

Pregunta 0 - 3 puntos

Cuando sea posible aplicar el Metateorema General de Monotonía (Metateorema de Paridad) en la correspondiente regla de Leibniz, indique la expresión E, la paridad de la subexpresión a sustituir (tanto en número como en par/impar) y coloque el operador correcto que relaciona las dos expresiones según el teorema indicado en la justificación. Cuando no sea posible aplicar el Metateorema, o la aplicación de la regla de Leibniz no esté correcta. indique el porqué.

1.

$$\neg((q \equiv r) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \neg p))$$
$$< \text{(3.81) Antisimetría } ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \equiv q))[p := \neg p] >$$
$$\neg((q \equiv r) \Rightarrow (\neg p \equiv q))$$

2.

$$\begin{array}{ll} & \neg((\neg p \Rightarrow (q \equiv r)) \wedge s \Rightarrow t) \\ & \quad < (4.1)\ (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))[p, q := (q \equiv r), \neg p] > \\ & \neg((q \equiv r) \wedge s \Rightarrow t) \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{ll} & q \vee r \equiv q \wedge r \Rightarrow q \wedge r \\ & \quad < (3.76c)\ \text{Fortalecimiento/Debilitamiento}\ (p \wedge q \Rightarrow p \vee q)[p, q := q, r] > \\ & q \vee r \equiv q \wedge r \Rightarrow q \vee r \end{array}$$

Respuesta

1.

$$\begin{array}{ll} & \neg((q \equiv r) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \neg p)) \\ \Leftarrow & \quad < (3.81)\ \text{Antisimetría}\ ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \equiv q))[p := \neg p] > \\ & \neg((q \equiv r) \Rightarrow (\neg p \equiv q)) \end{array}$$

La expresión es E: $\neg((q \equiv r) \Rightarrow z)$. La paridad de z es 1 (impar), pues se encuentra bajo el alcance de una negación. Entonces: $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \neg p) \Leftarrow (\neg p \equiv q)$.

2.

$$\begin{array}{ll} & \neg((\neg p \Rightarrow (q \equiv r)) \wedge s \Rightarrow t) \\ \Leftarrow & \quad < (4.1)\ (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))[p, q := (q \equiv r), \neg p] > \\ & \neg((q \equiv r) \wedge s \Rightarrow t) \end{array}$$

La expresión es E: $\neg(z \wedge s \Rightarrow t)$. La paridad de z es 2 (par), pues se encuentra en un antecedente y bajo el alcance de una negación. Entonces: $(\neg p \Rightarrow (q \equiv r)) \Leftarrow (q \equiv r)$.

3.

$$\begin{array}{ll} & q \vee r \equiv q \wedge r \Rightarrow q \wedge r \\ ? & \quad < (3.76c)\ \text{Fortalecimiento/Debilitamiento}\ (p \wedge q \Rightarrow p \vee q)[p, q := q, r] > \\ & q \vee r \equiv q \wedge r \Rightarrow q \vee r \end{array}$$

La expresión es E: $q \vee r \equiv q \wedge r \Rightarrow z$. La paridad de z es indefinida, pues se encuentra bajo el alcance de una equivalencia. Entonces no se puede aplicar el Metateorema.

Método Directo

Pregunta 1 - 5 puntos

Demuestre el teorema (3.82c) Transitividad: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \equiv r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
bajo la siguiente restricción:
(i) Sólo puede usar el **método de prueba Directo** (transformación por medio de equivalencias a *true* o a cualquier teorema ya conocido).

Prueba por el Método Directo:

$$
\begin{array}{ll}
 & (p \Rightarrow q) \wedge (q \equiv r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Shunting con}\, p, q := (p \Rightarrow q) \wedge (q \equiv r), p;\ \text{Asoc.}\wedge\ ;\ \text{Sim.}\wedge\ \rangle \\
 & (p \wedge (p \Rightarrow q)) \wedge (q \equiv r) \Rightarrow r \\
\equiv & \quad \langle (3.66)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q\ \rangle \\
 & p \wedge q \wedge (q \equiv r) \Rightarrow r \\
\equiv & \quad \langle \text{Sim.} \equiv ; \text{Asoc.}\wedge\ ;\ (3.50)\ p \wedge (q \equiv p) \equiv p \wedge q\ \ \text{con}\, p, q := q, r \rangle \\
 & p \wedge q \wedge r \Rightarrow r \\
\equiv & \quad \langle \text{Asoc.}\wedge\ ;\ \text{Sim.}\wedge\ \rangle \\
 & r \wedge (p \wedge q) \Rightarrow r \text{ — (3.76b) con } p, q := r, p \wedge q
\end{array}
$$

Aspectos a resaltar de esta demostración:

- Se requiere demostrar un teorema conocido que se encuentra en el libro de texto. Debió resultar sencillo hacer esta demostración. Además, la prueba es muy breve.
- En el antecedente no tenemos subexpresiones del tipo $p \wedge (p \Rightarrow q)$. Si las tuviésemos, podríamos aplicar el teorema (3.66).
- Shunting permite pasar al antecedente una subexpresión que se encuentra en el consecuente. En este caso pasamos p al antecedente (en conjunción con el resto del antecedente). Así es posible aplicar (3.66).
- La versatilidad del teorema (3.50) se ha explicado en clase, y se ha mostrado su uso tanto en las clases de teoría como de práctica.
- El último paso de la prueba (asociatividad y simetría de la conjunción) pudo haberse realizado de manera totalmente implícita. Por claridad, en esta prueba se coloca como un paso adicional.
- Las demostraciones de expresiones de implicación por el método directo con frecuencia finalizan alcanzando algún teorema de debilitamiento/fortalecimiento, en este caso, el (3.76b).
- Una expresión similar pero más complicada fue parte del examen Septiembre-Diciembre 2011. La demostración sigue las mismas estrategias en el uso de Shunting, (3.66), (3.50) y (3.76b). Se recomienda la lectura de la demostración 3.1 de la guía "Métodos de Prueba en el Cálculo Proposicional".

Método Abreviado Fortalecimiento

Pregunta 2 - 7 puntos

Se desea que Usted demuestre que la siguiente expresión es un teorema:

$$q \Rightarrow \neg((\neg p \wedge q \Rightarrow s) \wedge \neg s \wedge r \wedge \neg p)$$

bajo las siguientes restricciones:
(i) Sólo puede usar el **método de prueba abreviado de la implicación Fortalecimiento**, y (ii) **No** puede utilizar los Teoremas (3.47) De Morgan.

Prueba por el Método Abreviado Fortalecimiento:

$$\begin{array}{ll}
 & \neg((\neg p \wedge q \Rightarrow s) \wedge \neg s \wedge r \wedge \neg p) \\
\equiv & \quad \langle \text{Shunting con}\, p, r := \neg p, s;\ \text{Asoc.}\wedge\ ;\ \text{Sim.}\wedge\ \rangle \\
 & \neg(\neg p \wedge (\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow s)) \wedge \neg s \wedge r) \\
\Leftarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con}\, p, q := \neg p, (q \Rightarrow s);\ E : \neg(z \wedge \neg s \wedge r);\ \text{Paridad 1 (impar)} \rangle \\
 & \neg((q \Rightarrow s) \wedge \neg s \wedge r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con}\, p, q := q, s;\ \text{Sim.}\wedge\ \rangle \\
 & \neg(\neg s \wedge (\neg s \Rightarrow \neg q) \wedge r) \\
\Leftarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con}\, p, q := \neg s, \neg q;\ E : \neg(z \wedge r);\ \text{Paridad 1 (impar)} \rangle \\
 & \neg(\neg q \wedge r) \\
\Leftarrow & \quad \langle \text{(3.76b) Deb/Fort. con}\, p, q := \neg q, r;\ E : \neg z;\ \text{Paridad 1 (impar)} \rangle \\
 & \neg(\neg q) \\
\equiv & \quad \langle \text{Doble Neg. con}\, p := q \rangle \\
 & q
\end{array}$$

Aspectos a resaltar de esta demostración:

- Aunque el consecuente es una expresión negada, no significa que se deba hacer la prueba comenzando por De Morgan. El Metateorema de Paridad nos permite hacer una demostración más sencilla.
- La demostración se reduce a seguir la misma estrategia utilizada durante el curso, pero al estar la expresión dentro del alcance una negación, la paridad es impar, produciendo consecuencias en los pasos de Modus Ponens y (3.76b). Justamente ésto es lo que se busca obtener en una prueba por Fortalecimiento.
- El último paso de la prueba (doble negación) pudo haberse realizado de manera totalmente implícita. Por claridad, en esta prueba se coloca como un paso adicional.
- La demostración es muy similar a la del ejercicio 1.2.8(c) de la guía “Métodos de Prueba en el Cálculo Proposicional”. En el ejercicio 1.2.8(b) de la guía se muestra la complejidad añadida al comenzar la prueba utilizando De Morgan.

Método Abreviado Debilitamiento

Pregunta 3 - 10 puntos

Considere las siguientes premisas y conclusión en lenguaje natural:

Premisas:
Es suficiente que el robot se desplace sobre la arena y que no recolecte latas para que obtenga puntos en la competencia.
El robot obtiene puntos cuando recolecta latas.
Si la cámara funciona o el robot se desplaza sobre la arena, el público aplaude.
El robot se desplaza sobre la arena.

Conclusión:
El robot obtiene puntos y el público aplaude.

Modele el argumento y **demuestre utilizando solamente el método abreviado de implicación Debilitamiento** que las premisas dadas (H0, H1, H2 y H3) garantizan la conclusión propuesta (C), esto es:

$$\text{H0} \wedge \text{H1} \wedge \text{H2} \wedge \text{H3} \Rightarrow \text{C}$$

Para el modelado utilice sólo las siguientes variables:
p: El robot se desplaza sobre la arena.
q: El robot recolecta latas.
r: El robot obtiene puntos en la competencia.
s: La cámara funciona.
t: El público aplaude.

Modelo:

$$\begin{array}{ll} H0: & p \wedge \neg q \Rightarrow r \\ H1: & r \Leftarrow q \\ H2: & s \vee p \Rightarrow t \\ H3: & p \\ \hline C: & r \wedge t \end{array}$$

La expresión a demostrar es:

$$(p \wedge \neg q \Rightarrow r) \wedge (r \Leftarrow q) \wedge (s \vee p \Rightarrow t) \wedge p \Rightarrow r \wedge t$$

Es importante recordar colocar los paréntesis que sean necesarios para respetar la precedencia de los operadores. Como la conjunción tiene mayor precedencia que la implicación, se debe colocar paréntesis a $H0$, $H1$ y $H2$, para preservar el sentido del argumento.

Prueba por el Método Abreviado Debilitamiento:

$$
\begin{array}{ll}
 & (p \wedge \neg q \Rightarrow r) \wedge (r \Leftarrow q) \wedge (s \vee p \Rightarrow t) \wedge p \\
\equiv & \qquad \langle \text{Shunting con}\, q := \neg q;\ \text{Asoc.}\wedge\ ;\ \text{Sim.}\wedge\ \rangle \\
 & p \wedge (p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)) \wedge (r \Leftarrow q) \wedge (s \vee p \Rightarrow t) \\
\equiv & \qquad \langle (3.66)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q\ \text{ con}\, q := \neg q \Rightarrow r \rangle \\
 & p \wedge (\neg q \Rightarrow r) \wedge (r \Leftarrow q) \wedge (s \vee p \Rightarrow t) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Consecuencia con } p := r;\ \text{Asoc.}\wedge\ ;\ \text{Sim.}\wedge\ \rangle \\
 & (q \Rightarrow r) \wedge (\neg q \Rightarrow r) \wedge p \wedge (s \vee p \Rightarrow t) \\
\equiv & \qquad \langle (3.79)\ (p \Rightarrow r) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \equiv r \text{ con}\, p := q \rangle \\
 & r \wedge p \wedge (s \vee p \Rightarrow t) \\
\Rightarrow & \qquad \langle (3.76a)\ \text{Deb/Fort. con}\, q := s;\ E : r \wedge z \wedge (s \vee p \Rightarrow t);\ \text{Paridad 0 (par)};\ \text{Sim.}\vee\ \rangle \\
 & r \wedge (s \vee p) \wedge (s \vee p \Rightarrow t) \\
\Rightarrow & \qquad \langle \text{Asoc.}\wedge\ ;\ \text{Modus Ponens con}\, p, q := s \vee p,\ t;\ E : r \wedge z; \text{Paridad 0 (par)} \rangle \\
 & r \wedge t
\end{array}
$$

Aspectos a resaltar de esta demostración:

- Subexpresiones del tipo $p \wedge (p \Rightarrow q)$ deben saltar a nuestra vista pues permiten el uso de los teoremas (3.66) y Modus Ponens.
- Shunting permite pasar al consecuente una subexpresión que necesitaríamos para aplicar (3.66) o Modus Ponens, pero que no tenemos. En este caso pasamos $\neg q$ al consecuente, pues así es posible aplicar (3.66) utilizando p y la expresión resultante del Shunting.
- Dos implicaciones tienen a p en el antecedente: $(p \wedge \neg q \Rightarrow r)$ y $(s \vee p \Rightarrow t)$. Comenzar la prueba con Modus Ponens impediría la reutilización de p en la segunda implicación. Por esta razón se utiliza (3.66).
- Modus Ponens y (3.76a) permiten concretar la prueba por el Método Abreviado Debilitamiento.
- Como alternativa al uso de (3.76a) se pudo debilitar aplicando (3.76a) pero al antecedente de $(s \vee p \Rightarrow t)$. Como la paridad es 1 (impar), se tiene que $(s \vee p \Rightarrow t) \Rightarrow (p \Rightarrow t)$.

Suponer el Antecedente y Prueba Por Casos

Pregunta 4 - 10 puntos

Se desea que Usted demuestre que la siguiente expresión es un teorema utilizando el **método de suposición de antecedente, combinado con el método de prueba por casos sobre** $H4$.

$$\begin{array}{ll} H0: & p \wedge s \\ H1: & \neg r \Rightarrow \neg q \\ H2: & r \Rightarrow (\neg p \vee s \equiv \neg p) \\ H3: & t \wedge u \Rightarrow (\neg w \Rightarrow (p \not\equiv s)) \\ H4: & q \vee (t \wedge u) \\ \hline C: & w \vee x \end{array}$$

Prueba:

Supongo $H0 : p \wedge s \equiv true$
$H1 : \neg r \Rightarrow \neg q \equiv true$
$H2 : r \Rightarrow (\neg p \vee s \equiv \neg p) \equiv true$
$H3 : t \wedge u \Rightarrow (\neg w \Rightarrow (p \not\equiv s)) \equiv true$
$H4 : q \vee (t \wedge u) \equiv true$

Prueba por casos de H4
Caso q

$$\begin{array}{ll}
 & q \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := q \rangle \\
 & q \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H1 \equiv true \rangle \\
 & q \wedge (\neg r \Rightarrow \neg q) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := q, r \rangle \\
 & q \wedge (q \Rightarrow r) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := q, r;\ E : z; \text{Paridad 0 (par)} \rangle \\
 & r \\
\Rightarrow & \quad \langle H2 \equiv true;\ E : z; \text{Paridad 0 (par)} \rangle \\
 & \neg p \vee s \equiv \neg p \\
\equiv & \quad \langle (3.32)\ p \vee q \ \equiv p \vee \neg q \ \equiv \ p \ \text{ con } p, q := \neg p, s;\ \text{con Sim.} \equiv \rangle \\
 & \neg p \vee \neg s \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan con } q := s \rangle \\
 & \neg (p \wedge s) \\
\equiv & \quad \langle H0 \equiv true \rangle \\
 & \neg (true) \\
\equiv & \quad \langle \text{Def. false} \rangle \\
 & false \\
\Rightarrow & \quad \langle (3.75)\ false \Rightarrow p \equiv true \text{ con } p := w \vee x; E : z;\ \text{Paridad 0 (par)} \rangle \\
 & w \vee x
\end{array}$$

Caso $t \wedge u$

$$
\begin{array}{ll}
 & t \wedge u \\
\Rightarrow & \quad \langle H3 \equiv true;\ E : z; \text{Paridad 0 (par)} \rangle \\
 & \neg w \Rightarrow (p \not\equiv s) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := \neg w, (p \not\equiv s);\ \text{Doble Neg.} \rangle \\
 & \neg (p \not\equiv s) \Rightarrow w \\
\equiv & \quad \langle (3.10)\ (p \not\equiv q) \equiv \neg (p \equiv q) \text{ con } q := s;\ \text{Doble Neg.} \rangle \\
 & (p \equiv s) \Rightarrow w \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \ \text{ con } p := (p \equiv s) \Rightarrow w;\ \text{Sim.} \wedge \rangle \\
 & true \wedge ((p \equiv s) \Rightarrow w) \\
\equiv & \quad \langle H0 \equiv true \rangle \\
 & p \wedge s \wedge ((p \equiv s) \Rightarrow w) \\
\equiv & \quad \langle (3.50)\ p \wedge (q \equiv p) \equiv p \wedge q \ \text{ con } q := s;\ \text{Sim.} \equiv ; \text{Asoc.} \wedge \rangle \\
 & p \wedge ((p \equiv s) \wedge ((p \equiv s) \Rightarrow w)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := (p \equiv s), w;\ E : p \wedge z; \text{Paridad 0 (par)} \rangle \\
 & p \wedge w \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Sim.} \wedge ;\ (3.76b) \text{ Deb/Fort. con } p, q := w, p;\ E : z;\ \text{Paridad 0 (par)} \rangle \\
 & w \\
\Rightarrow & \quad \langle (3.76a) \text{ Deb/Fort. con } p, q := w, x;\ E : z;\ \text{Paridad 0 (par)} \rangle \\
 & w \vee x
\end{array}
$$

$\therefore w \vee x$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \wedge H3 \wedge H4 \Rightarrow w \vee x$ — MDE

Aspectos a resaltar de esta demostración:

- En una prueba por casos, la hipótesis con la que se hacen los casos no se vuelve a considerar dentro de los casos (ya está siendo usada). En vez, se debe buscar cuáles de las otras hipótesis se relacionan con cada caso. Aquí usamos q con H1, H2 y H0; y $t \wedge u$ con H3.

- Al hallar una contradicción se puede concluir cualquier expresión, a nuestra conveniencia. El teorema (3.75) $false \Rightarrow p \equiv true$ es más versátil entendiendo que $false \Rightarrow p$ es un teorema. En el caso q utilizamos $false \Rightarrow p$, con $p := w \vee x$.

- Cuando la conclusión es una disyunción, basta con alcanzar uno de los operandos de la disyunción, puesto que por debilitamiento se puede concluir la disyunción. En el caso $t \wedge u$, una vez obtenido w concluimos $w \vee x$ por (3.76a) Deb/Fort. En el curso se han realizado demostraciones similares.

- Cuando se hace un debilitamiento o un fortalecimiento que no es obvio, es importante chequear la paridad de la expresión e indicarla en consideración a los lectores de la prueba. Por claridad, en este documento se indica la paridad en todos los debilitamientos y fortalecimientos realizados.

Axiomas y Teoremas Utilizados

Axiomas:

(3.2)	$p \equiv q \equiv q \equiv p$	Simetría $\equiv$
(3.8)	$false \equiv \neg true$	Definición de Falso
(3.10)	$(p \not\equiv q) \equiv \neg(p \equiv q)$	Definición de $\not\equiv$
(3.24)	$p \vee q \equiv q \vee p$	Simetría de $\vee$
(3.58)	$p \Leftarrow q \equiv q \Rightarrow p$	Consecuencia

Teoremas:

(3.12)	$\neg\neg p \equiv p$	Doble Negación
(3.32)	$p \vee q \equiv p \vee \neg q \equiv p$	
(3.36)	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	Simetría $\wedge$
(3.37)	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Asociatividad $\wedge$
(3.39)	$p \wedge true \equiv p$	Neutro $\wedge$
(3.47a)	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	De Morgan
(3.50)	$p \wedge (q \equiv p) \equiv p \wedge q$	
(3.61)	$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$	Contrarrecíproco
(3.65)	$p \wedge q \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	Shunting
(3.66)	$p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$	
(3.75)	$false \Rightarrow p \equiv true$	
(3.76a)	$p \Rightarrow p \vee q$	Debilitamiento/Fortalecimiento
(3.76b)	$p \wedge q \Rightarrow p$	Debilitamiento/Fortalecimiento
(3.77)	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	Modus Ponens
(3.79)	$(p \Rightarrow r) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \equiv r$	Análisis de Casos